ESTADO DO PARANÁ
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENSINO DE JOVENS E ADULTOS

MATEMÁTICA

ENSINO FUNDAMENTAL – FASEII

CADERNO 2

GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ
Jaime Lerner

SECRETÁRIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
Alcyone Saliba

DIRETORA GERAL DA SEED
Sônia Loyola

CHEFE DO DEPARTAMENTO DE ENSINO SUPLETIVO
Regina Célia Alegro

ASSISTENTE TÉCNICO ADMINISTRATIVO
Annete Elise Siedel

EQUIPE ELABORADORA (1ª VERSÃO)
Cristina N. Nakamura - CEEBJA de Maringá
Leoni Teresa M. Brudzinski - CEEBJA de Maringá
Sachika Sakai Takizawa - CEEBJA de Maringá
Vera Lúcia G. T. Sanches - CEEBJA de Maringá

EQUIPE COLABORADORA
Graça Rejane C. Montanher - CEEBJA de Maringá
Mafalda D. Nascimento - CEEBJA de Nova Londrina
Missayo Yamada - CEEBJA de Jandaia do Sul
Neide Aparecida de S. Moreira - CEEBJA de Jandaia do Sul
Neuza Pinto - CEEBJA de Paranavaí

EQUIPE REVISORA
Cristina Nishioka Nakamura - CEEBJA de Maringá
Mirian Nazaré B. Damaceno - CEEBJA de Maringá

EQUIPE REVISORA (VERSÃO ATUAL)
CEEBJA Paulo Freire
CEEBJA SESI-CIC

CAPA
Rosângela Gonçalves de Oliveira

ILUSTRAÇÃO
Henrique Cesar Alves de Cerqueira
Jairo de Carvalho

DIAGRAMAÇÃO
Luiz Carlos Tavares de Sá

APRESENTAÇÃO

Este material foi preparado com a intenção de ajudá-lo a compreender idéias e conceitos importantes da Matemática e a suas relações com a vida diária. Esperamos que, quando necessário, você possa aplicar esses conhecimentos em situações novas, resolvendo seus problemas do dia-a-dia.

Ele foi escrito numa linguagem simples e informal, cuja a intenção é levá-la a compreensão dos assuntos básicos da Matemática, da maneira mais clara possível.

Os conhecimentos matemáticos foram construídos ao longo do tempo e, por acharmos importante para você, apresentamos também alguns aspectos históricos dessa construção.

Nossa expectativa é que esse material torne útil e interessante o seu Curso de Matemática de 5ª a 8ª série de 1º grau.

EQUIPE ELABORADORA

ÌNDICE

U N I D A D E 1
NÚMEROS INTEIROS

1 – O NÚMERO NEGATIVO

Vamos conhecer um pouco da história dos números negativos.

No século VII, os matemáticos hindus já usavam quantidades negativas, mas se recusavam a considerá-las como números.

A idéia de uma quantidade negativa foi considerada absurda, durante muitos séculos.

Ainda, na época do descobrimento do Brasil, o matemático Stiffel, publicou u livro em que considerava os negativos como números absurdos. Um tempo depois, o matemático Cardano deu a eles o nome de números falsos.

Foi a partir do século XVI, que os matemáticos passaram a usar os números negativos, com desembaraço.

Atualmente, eles são usados no dia-a-dia para representar os saldos bancários, lucros e prejuízos, variação da taxa de inflação, medidas de temperatura, dentre outras situações.

MEDIDA DE TEMPERATURA

Leia o texto e pense sobre ele.

Curitiba teve o dia mais frio do ano

Curitiba registrou ontem de madrugada o dia mais frio do ano, -1,2 graus Celsius. Não geou na capital, mas o meteorologista Oswaldo Iwamoto, da Universidade Federal do Paraná (UFPR), avisa: “As geadas chegam no Paraná no mais tardar até a semana que vem”. O inverno deste ano, com início previsto oficialmente para às 11h32 do dia 21 de junho (horário de Curitiba), deve ser mais rigoroso que o de 1993.

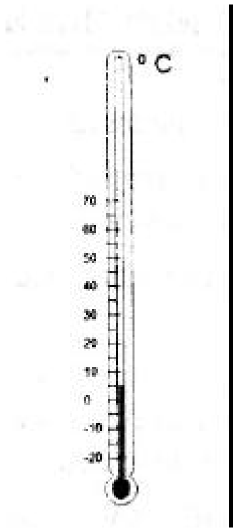
A temperatura baixa de ontem, -0,1 grau menor que a mínima anterior foi causada por um anticiclone polar, localizado sobre o Paraná e Santa Catarina. Vindo do Sul, o anticiclone move-se em direção ao Sudeste. O clima deve de tornar mais ameno hoje, mas o calor registrado no início do mês não deve voltar. O inverno chega ao Brasil oficialmente às 11h49 do dia 21 de junho. A máxima de ontem ficou 14,6 graus.

Segundo Iwamoto, o frio deve ser mais intenso que o de 1993 porque a temperatura mínima registrada no ano passado – um grau negativo – foi “relativamente alta para o inverno curitibano”. O meteorologista da UFPR acredita que a mínima deste ano não deve se situar entre 1 e 3 graus Celsius em Curitiba. As geadas também devem se tornar mais intensas.

Fonte: Estado do Paraná – 31/05/94

De acordo com o texto a temperatura mínima observada em Curitiba, em um determinado dia, foi –1,2C (Cº = graus Celsius). Essa temperatura está indicada com o sinal de menos (-), porque no termômetro, ela está abaixo de zero. Termômetro é o aparelho usado para medir a temperatura. Um dos modelos mais conhecidos é feito de um tubo fino de vidro contendo uma sustância química, com graduações, medidas em graus Celsius.

Veja o desenho:



Os números inteiros indicados com o sinal menos (-) são chamados de números inteiros negativos.

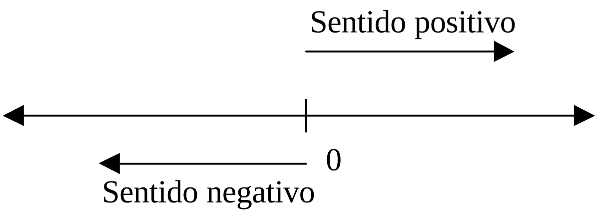
Os números inteiros sem indicação de sinal, ou com o sinal mais (+), são chamados de números inteiros positivos.

2 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS INTEIROS

Podemos representar os números inteiros no que chamamos reta numerada.

Assim:

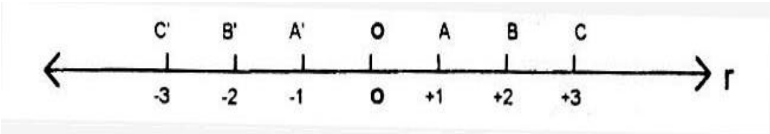
- Desenhamos uma reta **r** e sobre ela marcamos um ponto **0**, correspondente ao número **zero**. A reta **r** tem dois sentidos opostos percurso, veja:



- Escolhemos um segmento unidade para assinalar os pontos.

(Ex.: 1cm)

- A partir do ponto 0, à sua direita assinalamos os pontos correspondentes aos números inteiros positivos e à sua esquerda assinalamos os pontos correspondentes aos números inteiros negativos.



- A cada ponto da reta **r**, associamos um número inteiro.

O que fizemos foi a representação dos números inteiros relativos na reta numérica, ou seja, construímos a reta numérica inteira.

Em Matemática, representamos o conjunto dos números inteiros por **Z**, e **Z** = {...-3, -2, -1, 0, $\underbrace{1, 2, 3, ...}_{\mathbf{N}}$}.

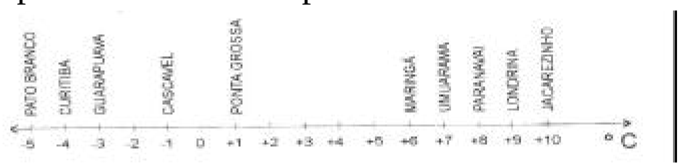
Observe que o conjunto dos números naturais **N** está contido no conjunto **Z** dos números inteiros relativos.

3 – OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Suponhamos que num determinado dia as temperaturas registradas em algumas cidades do Paraná foram:

Jacarezinho	→ + 10ºC
Londrina	→ + 9ºC
Paranavaí	→ + 8ºC
Umuarama	→ + 7ºC
Maringá	→ + 6ºC
Ponta Grossa	→ + 1ºC
Cascavel	→ - 1ºC
Guarapuava	→ - 3ºC
Curitiba	→ - 4ºC
Pato Branco	→ - 5ºC

Podemos representar essas temperaturas na reta numerada, assim:



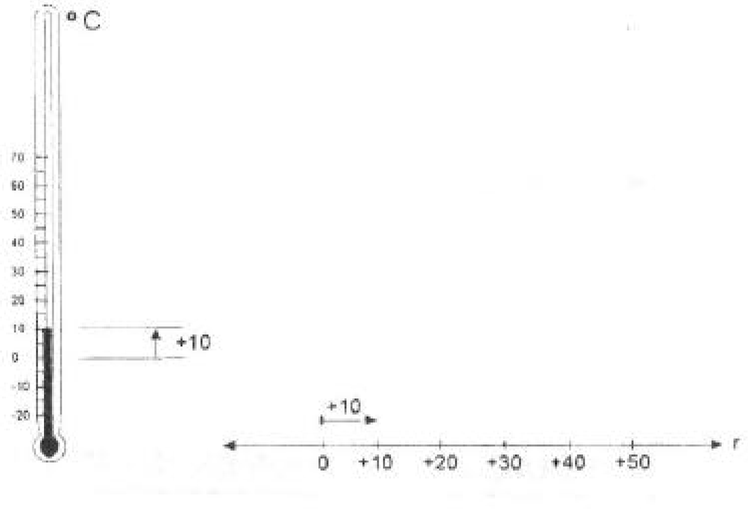
Com base nas afirmações acima, vamos estudar a adição e a subtração de números inteiros.

ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Lembrando que a reta numérica inteira tem dois sentidos de percurso que são:

- **Sentido positivo**: para assinalar um número inteiro positivo, *deslocamos* para cima ou para a direita.

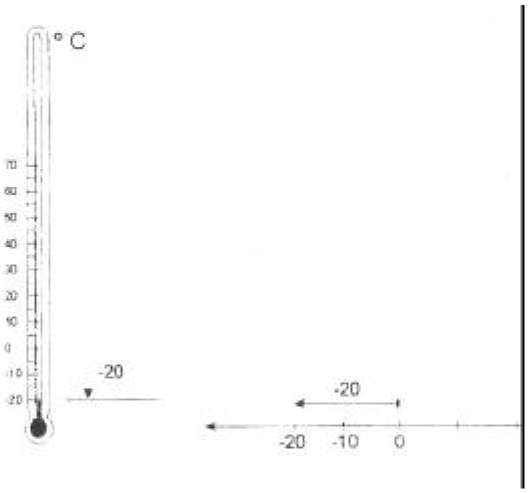
Veja nos exemplos:



Podemos observar que nas duas representações fizemos um deslocamento a partir de 0, de 10 unidades, para cima e para a direita, por isso escrevemos + 10.

- **Sentido negativo**: para assinalar um número inteiro negativo, *deslocamos* para baixo ou para a esquerda.

Veja nos exemplos:



Nesse caso, fizemos um deslocamento, a partir de 0, de 20 unidades para baixo e para a esquerda, por isso escrevemos –20.

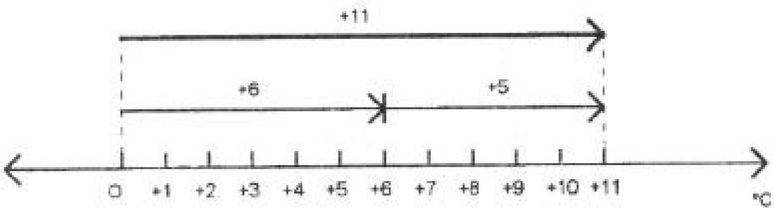
Vamos, agora, considerar as seguintes situações:

Situação - 1

Num determinado dia a temperatura registrada em Maringá, no período da manhã era de + 6 graus, e durante a tarde, subiu 5 graus. Que temperatura o termômetro marcará no final da tarde, caso não haja outra mudança de temperatura?

Se você respondeu 11 graus positivos, acertou!

Vamos fazer a representação na reta numérica inteira, assim:

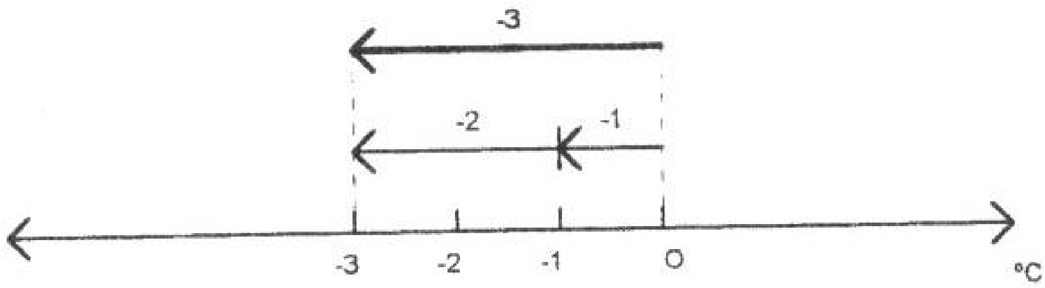


Podemos escrever então, que: **(+6) + (+5) = (+11)**

Situação – 2

A temperatura em Cascavel durante o dia era de –1 grau. De madrugada desceu 2 graus. Que durante o termômetro registrou durante a madrugada?

Representando na reta numérica, temos:



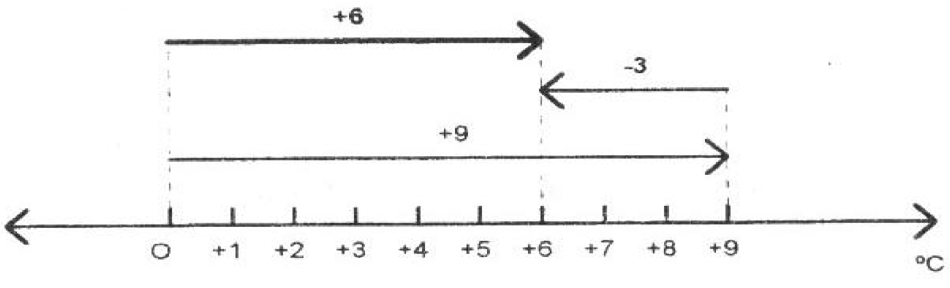
Concluímos, então, que a temperatura era de 3 graus abaixo de zero.

Então: **(-1) + (-2) = (-3)**

Situação – 3

Se em Londrina a temperatura era de + 9 graus caísse 3 graus, qual seria a nova temperatura registrada pelo termômetro?

Podemos representar essa situação da seguinte maneira:



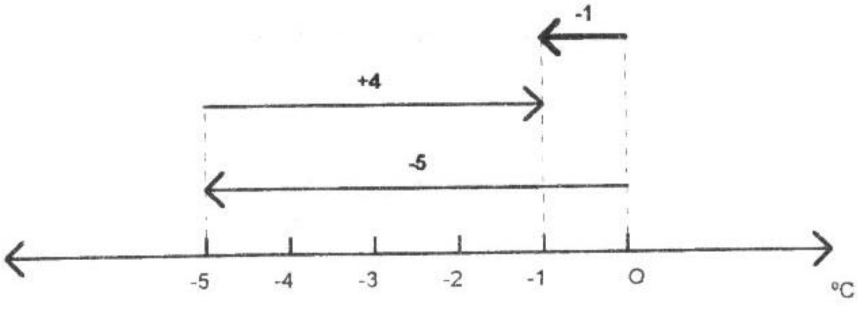
A temperatura seria de graus acima de zero.

Então: **(+9) + (-3) = (+6)**

Situação – 4

Em Pato Branco a temperatura era de –5 graus, durante a madrugada. Até às 8 horas havia subido 4 graus. Que temperatura o termômetro registrou às 8 horas?

Vamos fazer essa representação na reta numerada, assim:



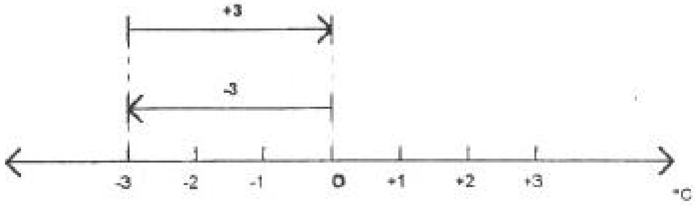
Concluímos, estão, que às 8 horas a temperatura era de 1 grau abaixo de zero.

Podemos escrever: **(-5) + (+4) = (-1)**

Situação - 5

Em Guarapuava, ao amanhecer, o termômetro havia registrado –3 graus. Até às 12 horas o termômetro subiu 3 graus, nesse horário qual era a temperatura indicada pelo termômetro?

Vamos representar na reta numerada, assim:



Observamos, então, que a temperatura às 12 horas era de 0ºC.

Então: (-3) + (+3) = 0

E todas as situações estudadas acima, juntamos quantidade positivas e negativas, isto é, fizemos a adição de números inteiros.

Podemos representar a adição de números inteiros de uma maneira mais simples, assim:

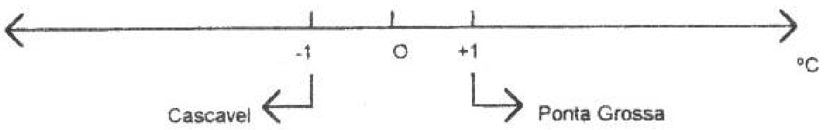
1) (+6) + (+5) = (+11) ou +6+5=+11
2) (-1) + (-2) = (-3) ou -1-2=-3
3) (+9) + (-3) = (+6) ou +9-3=+6
4) (-5) + (-3) = (-8) ou -5+4=-1

Você pode notar que eliminamos o sinal de + da operação e os parentes das parcelas e escrevemos cada uma das parcelas com seu próprio sinal.

NÚMEROS INTEIROS OPOSTOS

Vamos representar as temperaturas de Cascavel e Ponta Grossa na reta numerada.

Assim:

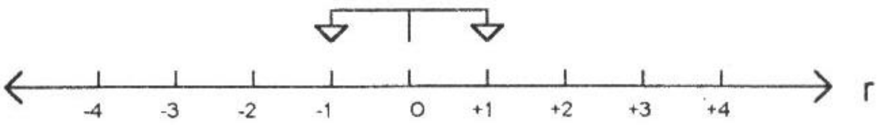


Na reta numérica estão marcadas as temperaturas +1 e –1. O que você observa em relação à distância desses pontos com a origem?

Se você concluiu que estão à mesma distância, acertou!

Na reta numérica inteira, dizemos que dois números são opostos quando estão representados por dois pontos que se localizam à mesma distância do zero, mas em sentido opostos.

Fazendo a representação na reta numerada, temos:



Dizemos então, que o oposto de (+1) é (-1).

Observe que os deslocamentos de **zero** a **+1** e de **zero** a **–1** são opostos, mas a distância entre esses dois pontos com a origem permanece a mesma. A essa distância chamamos de módulo, e representamos por:

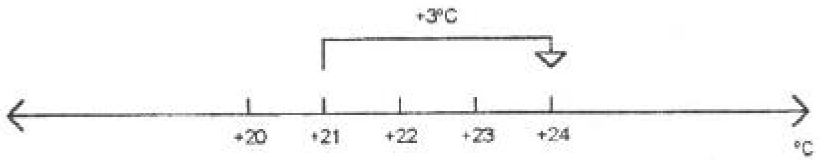
[+1] = 1 unidade
[-1] = 1 unidade

Portanto, o módulo de um número inteiro é sempre um valor não negativo.

SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Quando um temperatura passa de 21ºC para 24ºC, dizemos que houve um aumento de 3ºC, a esse aumento chamamos de **variação de temperatura.**

Veja a representação abaixo:



Podemos verificar que houve um aumento de 3 graus Celsius positivos.

Calculamos, então, a variação da temperatura fazendo a diferença entre as temperaturas final e a inicial.

Nesse caso: $\underbrace{24}_{\text{Temperatura final}} - \underbrace{21}_{\text{Temperatura inicial}} = 3$

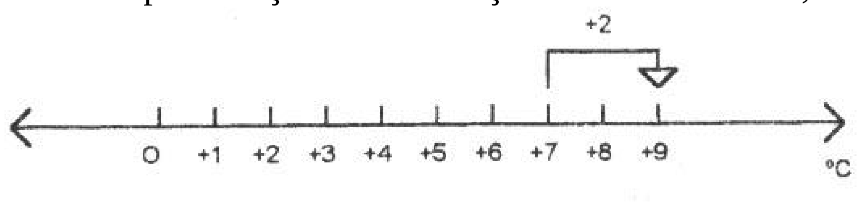
Vamos consi

Situação – 1

Qual seria a variação da temperatura em Umuarama, se de +7 graus, passasse para +9 graus?

Se você respondeu que a variação seria de +2 graus, acertou!

Vamos fazer a representação dessa situação na reta numerada, assim:



Observando a reta podemos representar a diferença entre as temperaturas final e inicial, assim: $\underbrace{(+9)}_{\text{Temperatura final}} - \underbrace{(+7)}_{\text{Temperatura inicial}} = +2$

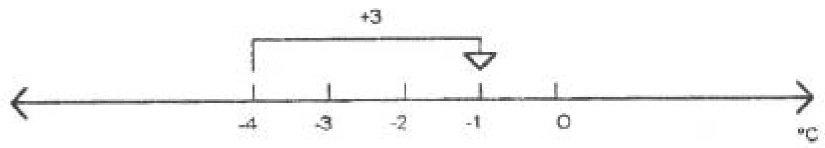
Ou, esse resultado pode ser obtido, efetuando-se a subtração de números inteiros:

$(+9) - (+7) = (+9) + \underbrace{(-7)}_{\text{Oposto de (+7)}} = +2$ $\rightarrow$ Subtrair (+7) de (+9) é o mesmo que adicionar a (+9) o oposto de (-7).

Situação – 2

A temperatura em Curitiba passou de –4 graus registrados de madrugada, para –1 graus ao amanhecer. Qual foi a variação da temperatura?

Podemos representar essa situação na reta numerada da seguinte maneira:



Concluímos que a variação foi de +3 graus.

Então: $\underbrace{(-1)}_{\text{Temperatura final}} - \underbrace{(-4)}_{\text{Temperatura inicial}} = +3$

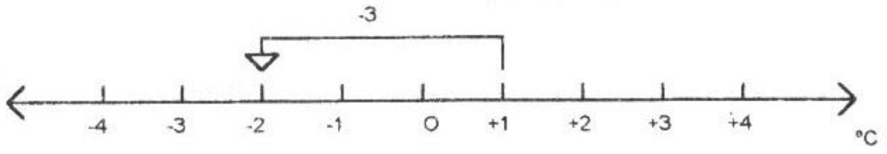
Ou:

$(-1) - (-4) = (-1) + \underbrace{(+4)}_{\text{Oposto de (-4).}} = +3$ Subtrair (-4) de (-1) é o mesmo que adicionar a (-1) o oposto de (-4).

Situação - 3

Se em Ponta Grossa a temperatura que era de +1 grau passar para –2 graus, de quanto será essa variação?

Vamos mostrar a representação na reta numerada.



Logo, a variação será de –3 graus.

Então: $\underbrace{(-2)}_{\text{Temperatura final}} \; - \; \underbrace{(+1)}_{\text{Temperatura inicial}} \; = \; -3$

Ou:

$(-2) - (+1) = (-2) + \underbrace{(-1)}_{\text{Oposto de (+1).}} = -3$

Subtrair (+1) de (-2) é o mesmo que adicionar a (-2) o oposto de (+1).

Podemos dizer, então, que:

Subtrair dois números inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo

A subtração de números inteiros, também, pode ser escrita de forma mais simples, veja:

1) $(+9) - (+7) = +9 \; \underbrace{-7}_{\text{Oposto de (+7).}} = +2$

2) $(-1) - (-4) = -1 \; \underbrace{+4}_{\text{Oposto de (-4).}} = +3$

3) $(-2) - (+1) = -2 \; \underbrace{-1}_{\text{Oposto de (+1).}} = -3$

Você pode notar que eliminamos os parênteses, o sinal da subtração e trocamos o segundo termo pelo seu oposto.

Com base nas situações anteriores você pode concluir:

- quanto aos sinais
  1º quando eles são iguais
  2º quando eles são diferentes
- quanto as operações

Na soma algébrica (adição e subtração) quando os números têm sinais iguais, faz-se a adição e conserva-se o sinal. Se os números tiverem sinais diferentes, faz-se a subtração e coloca-se o sinal do maior módulo.

Vamos calcular o resultado de (+1) + (+2) + (-1) – (+3). Escrevendo de forma mais simples, temos:

$$(+1) + \underbrace{(+2)} + \underbrace{(-1)} - \underbrace{(+3)} =$$

$$\underbrace{+1 \qquad +2}_{+3} \qquad \underbrace{-1 \qquad -3}_{-4} \qquad = \qquad = -1$$

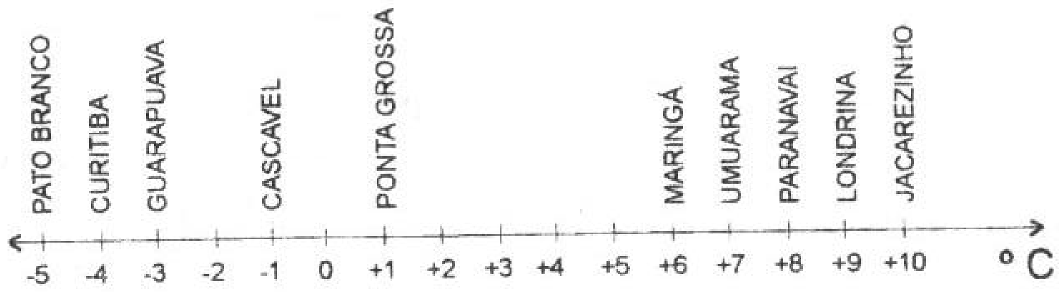
Logo, o resultado é –1.

Podemos observar que a adição e a subtração de números inteiros podem ser consideradas como única operação. Ela pode ser simplificada, escrevendo-se um número ao lado do outro, após eliminar os parênteses e:

- conservando-se o sinal do número, na adição;
- trocando o sinal do número, na subtração.

ATIVIDADE – I

1) Observando novamente a reta numérica, que representa as supostas temperaturas de algumas cidades do Estado do Paraná, responda:



a) Em quais cidades a temperatura foi acima do zero?
b) Em quais cidades a temperatura foi abaixo de zero?
c) Em qual cidade fez mais frio?
d) Em qual cidade fez mais calor?
e) Comparando Londrina e Curitiba, em qual delas fez mais calor?
f) Qual a diferença de temperatura entre essas duas cidades?
g) Quantos graus o termômetro marcará se a temperatura em Pato Branco subir 3 graus?
h) Se a temperatura em Guarapuava subir 4 graus, qual a nova temperatura que o termômetro registrará?

i) Quantos graus o termômetro marcará se a temperatura em Umuarama descer 2 graus?

j) Quantos graus o termômetro marcará se a temperatura em Maringá descer 7 graus e depois subir 3 graus?

2) Observe com atenção o seguinte extrato bancário:

Banco: Cesbanco
Cliente: Gabriel Boa Nova

DATA	***HISTÓRICO***	***CRÉDITO***	***DÉBITO***	***SALDO***
21/10/94	Saldo anterior			R$ 200,00
22/10/94	Cheque emitido		R$ 180,00	
23/10/94	Depósito	R$ 140,00		
24/10/94	Cheque emitido		R$ 130,00	
26/10/94	Saque Cx. Eletrôn		R$ 50,00	
28/10/94	Taxa IPMF		R$ 1,00	
29/10/94	Saque Cx. Eletrôn		R$ 10,00	
30/10/94	Depósito	R$ 120,00		

Neste extrato, está registrado todo o movimento bancário de Gabriel. Feito no período de 21/10 a 30/10/2002. Este movimento refere-se a depósito na conta (crédito), taxas, saques e cheques emitidos (débitos).

Com base nessas informações, responda:

a) Quantos cheques foram emitidos?
b) Qual o valor dos cheques emitidos?
c) Qual o saldo no dia 30/10/2002?
d) O que o cliente tinha de saldo, mais o que ele depositou foi suficiente para suas retiradas?
e) Ele ficou devendo ou não? Quanto?

3) Em São Joaquim (Santa Catarina), costuma-se fazer muito frio. Num domingo a temperatura acusava 2ºC, na segunda-feira a temperatura caiu 4ºC, na terça-feira subiu 3ºC e na quarta –feira a temperatura caiu 2ºC. Calcule a temperatura no final de quarta-feira.

4) A tabela abaixo, mostra os pontos marcados num jogo:

EQUIPES	**PONTOS GANHOS**	**PONTOS PERDIDOS**
A	+10	-2
B	+4	-6
C	+8	-8
D	+6	-10

Com base nessas informações, responda:

a) Qual o saldo das equipes:
- A
- B
- C
- D

b) Qual a equipe vencedora?

c) Qual a equipe que perdeu mais pontos?

d) Quais equipes ficaram com saldo negativo?

e) Represente na reta numerada os pontos ganhos e perdidos de todas as equipes.

5) Efetue:

a) (-3) + (+3) =
b) (+4) + (-5) =
c) (+10) + (-13) =
d) (-2) – (-3) =
e) (-20) – (+5) =
f) (+16) – (-3) =
g) 3 – 5 =
h) –13 + 12 =
i) (-10) + (-7) – (+3) =
j) (+2) – (-5) + (+8) =

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Situação - 1

Você já sabe que:

$3 \;.\; 5 = (+3) \;.\; (+5) = 5 + 5 + 5 = +15$

$5 \;.\; 3 = (+5) \;.\; (+3) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$

Utilizando essa mesma idéia para os números negativos, temos:

$+3 \;.\; (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$

O que você pode concluir quanto a multiplicação de números com sinais diferentes?

Observe estas multiplicações:

Fatores	Produtos
4 . (- 2) =	- 8
3 . (- 2) =	- 6
2 . (- 2) =	- 4
1 . (- 2) =	- 2
0 . (- 2) =	0
(- 1) . (- 2) =	+2
(- 2) . (- 2) =	+4
(- 3) . (- 2) =	+6
(- 4) . (- 2) =	+8

Diminui 1 unidade ↓ Aumenta 2 unidades

Observando a tabela, podemos perceber que, enquanto os fatores decrescem unidade, os produtos crescem 2 unidades.

O que você pode concluir com referência à multiplicação de 2 números negativos?

PRODUTO DE TRÊS OU MAIS NÚMEROS INTEIROS

Como podemos calcular o produto (-6) . (+3) . (-2) . (-1)?

Esse produto pode ser calculado da seguinte forma:

$$\underbrace{(-6) . (+3)} . (-2) . (-1) =$$

$$= \underbrace{(-18) . (-2)} . (-1)$$

$$= \underbrace{(+36) . (-1)} =$$

$$= -36$$

Ou seja, multiplicamos o primeiro fator pelo segundo, o resultado pelo terceiro fator e assim por diante, até o último fator.

Situação – 2

Com relação à divisão, pode-se afirmar que os conceitos (conclusões) observadas na multiplicação valem também para a divisão, pois são operações inversas.

Observe:

	Dividendo / Divisor	Quociente	
	- 8 : (- 2) =	+4	
	- 6 : (- 2) =	+3	
	- 4 : (- 2) =	+2	
	- 2 : (- 2) =	+1	
	0 : (- 2) =	0	
	+2 : (- 2) =	- 1	
	+4 : (- 2) =	- 2	
	+6 : (- 2) =	- 3	
Aumenta 2 unidades	+8 : (- 2) =	- 4	Diminui 1 unidade

Quando os dividendos aumentam 2 unidades, o quociente diminui 1 unidade.

Agora é a sua vez. Faça a tabela do –3 (multiplicação e divisão).

Com base nas informações anteriores e no exercício que você acabou de fazer, pode-se concluir em relação à multiplicação e a divisão de números inteiros que:

- **Quando os números tiverem sinais iguais, o sinal do resultado será positivo (+).**
- **Quando os números tiverem sinais diferentes, o sinal do resultado será negativo (-).**

ATIVIDADE – II

1) Um matemático do final do século XVI escreveu a seguinte história:
"Eu tinha 3 dividas, todas de 4 moedas de ouro. Mas, as pessoas para quem eu devia morreram. Perdi 3 vezes a divida de 4 moedas. Fiquei 12 moedas mais ricos".

(Extraído do livro Matemático na Medida Certa Jacubovick/Lellis)

Com esta história, o matemático quis explicar que (-3) . (-4) = +12.

Na história, o que representam os números –3, -4 e +12? Explique os sinais de cada um desses números.

2) Efetue os seguintes cálculos:

a) 7 . 11 . 13 =
b) 7 . (-11) . (-13) =
c) (-7) . 11 . (-13) =
d) (-7) . 11 . 13 =
e) (-7) . (-11) . (+13) =
f) (-7) . (-11) . (-13) =

3) Em cada situação representada matematicamente, tem-se uma possível maneira de resolver e concluir. Pense, pense,... e complete com o resultado correto:

a) Um feirante tem 5 caixas de laranja com sessenta laranjas cada. Logo ele tem ____________ laranjas.
b) Se ele tem +300 laranjas e vai colocá-las em saquinhos de uma dúzia cada, vai precisar de ____________ saquinhos.
c) Se ele vendeu 10 dúzias (ele tem –10) e tem uma estimativa de que o consumidor deixa estragar 2 dúzias (-2), então se perderam ____________ dúzias.

4) Numa prova de múltipla escolha, o aluno ganha 5 pontos, a cada questão certa, perde 2 pontos a cada questão errada e não ganha e nem perde, a cada questão não respondida. De um total de 20 questões, Maria acertou 12 questões, errou 4 e não respondeu 4. Qual foi sua nota final?

5) Num campeonato de tiro ao alvo, para cada tiro certo o atirador ganha 8 pontos e para cada tiro errado, perde 5 pontos. Cada um dos participantes daria 10 tiros. Participaram desse campeonato:

- Marcos, acertou 3 e errou 7.
- Paulo, acertou 6 e errou 4.
- Júlio, Acertou 9 e errou 1.
- Fernando. Acertou 8 e errou 2.
- Lauro acertou 2 e errou 8.

Baseado nessas informações, faça o que se pede:

a) Qual o total de pontos de cada um dos participantes?
b) Quem venceu esse campeonato?
c) Coloque o nome dos participantes na ordem de classificação (do primeiro ao quinto lugares).
d) Qual a diferença de pontos entre o primeiro e o último colocado?

6) Determine o número inteiro que se deve colocar no lugar do (.....) para tornar verdadeira as igualdades:

a) (.....) . (-3) = +18
b) (+5) . (.....) = -15
c) (.....) . (+7) = -56
d) (+8) . (.....) = +24
e) (+42) : (.....) = -6
f) (-36) : (.....) = +3
g) (.....) : (-8) = -5
h) (.....) : (+9) = +7

7) Qual é o resultado de:

a) (-27) : (+3) ?
b) (+6) . (-9) ?
c) (+36) : (-9) ?
d) (-8) . (-8) ?
e) (+5) . (+9) ?
f) (-22) : (-2) ?
g) (-3) x (+12) ?
h) (+72) : (+9) ?

8) Quanto é:

a) o dobro de –4?
b) A metade de –40?
c) O triplo de –9?
d) A terça parte de +39?
e) O quádruplo de +8?
f) A quarta parte de –120?

U N I D A D E 2
NÚMEROS RACIONAIS

Durante muito tempo, os números naturais foram os únicos conhecidos e usados pelos homens. Com o passar do tempo foram surgindo novas necessidades práticas, como a de representar o fracionamento de medidas, área, tempo, comprimento, dentre outras.

Para responder a esta necessidade foram criados os números fracionários.

As frações durante muito tempo foram representadas de várias maneiras, mas só no século XVI que surgiu a forma atual de representá-la, um par ordenado separado por uma barra ($\frac{a}{b}$) onde *b* é diferente de zero.

1 – MÚLTIPLOS DE UM NÚMERO NATURAL

Observe a situação

Na estação rodoviária de Curitiba, os ônibus para Londrina partem de 4 em 4 horas, e para São Paulo partem de 6 em 6 horas diariamente. Se, num certo dia, os dois ônibus partiram a zero hora simultaneamente, depois de quantas horas esses ônibus partirão novamente na mesma hora?

Para resolver esse problema, é preciso saber os horários de partida dos ônibus para Londrina e São Paulo, durante um dia.

Vamos preencher a tabela abaixo com esses horários:

Londrina	Zero hora	4h	8h	12h	16h	20h
São Paulo	Zero hora	6h	12h	18h	-	-

Observe na tabela:

- Os números que representam as partidas dos ônibus para Londrina vão aumentando de 4 em 4. Assim: 0, 4, 8, 16, 20, esses números são **múltiplos de 4**, ou seja, qualquer um deles é o resultado da multiplicação de 4 por algum outro número.

Veja:

4 . 0 = 0
4 . 1 = 4
4 . 2 = 8
4 . 3 = 12
4 . 4 = 16
4 . 5 = 20

- Os números que representam as partidas dos ônibus para São Paulo vão aumentando de 6 em 6. Assim: 0, 6, 12, 18, são números **múltiplos de 6**, ou seja, qualquer um deles é o resultado da multiplicação de 6 por algum outro número.

Veja: $6 . 0 = 0$
$6 . 1 = 6$
$6 . 2 = 12$
$6 . 3 = 18$

2 – MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Vamos voltar a observar a tabela. Comparando dos ônibus para Londrina e São Paulo, percebemos que, depois de 12 horas, esses ônibus partirão novamente na mesma hora.

Observe que nessa situação o número 12 é o **menor múltiplo comum de 4 e 6,** diferente de zero. Este número é chamado de **mínimo múltiplo comum de 4 e 6.**

Ele é indicado assim: m.m.c. (4,6).

Dados dois ou mais números naturais, diferentes de zero, o mínimo múltiplo comum deles é o menor número, diferente de zero, que seja múltiplo de todos eles.

Vamos voltar aos múltiplos de 4. Como eles vão crescendo de 4 em 4, posso continuar escrevendo esses múltiplos.

Veja:

0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...

Escreva mais alguns múltiplos de 6, continuando a seqüência:

0, 6, 12 ,18, 24, ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...,

Você deve ter observado que **um número tem infinitos múltiplos.**

3 – DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL

Já vimos que qualquer múltiplo de 4 é o resultado da multiplicação de 4 por algum outro número:

Por exemplo:
4 . 3 = 12
12 é múltiplo de 4
12 é divisível por 4
4 é divisor de 12, porque a divisão de 12 por 4 dá resto zero.

Veja todos os divisores de 12:
1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Vamos fazer o mesmo com o múltiplo de 6.
6 . 3 = 18
18 é múltiplo de 6
18 é divisível por 6
6 é divisor de 18, porque na divisão de 18 por 6, o resultado é zero.

Escreva todos os divisores de 18.
....

4 – NÚMEROS PRIMOS

Vamos escrever todos os divisores de alguns números.

Assim:
- ✓ Os divisores de 2, são 1 e 2
- ✓ Os divisores de 5, são 1 e 5
- ✓ Os divisores de 8, são 1, 2, 4 e 8
- ✓ Os divisores de 9, são 1, 3 e 9
- ✓ Os divisores de 13, são 1 e 13.

Observe na atividade acima que existem números que possuem apenas dois divisores, como 2, 5, 13. Esses números são denominados **números primos.**

Números primos são os números naturais que têm apenas dois divisores diferentes: o 1 e ele mesmo.

Os números primos menores que 30 são:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29.

5 – FATORAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

Podemos escrever o número 12 na forma de multiplicação.

Assim:
12 = 3 . 4
ou 12 = 2 . 2 . 3

Observe que na multiplicação 2 . 2 . 3 todos os fatores são primos.

Então, 2 x 2 x 3 é a **fatoração** de 12.

Chamamos de fatoração de um número natural, maior que 1, a sua decomposição num produto de fatores primos.

A fatoração de um número pode ser feita de uma maneira mais prática.

Vamos fatorar o número 12.

Acompanhe os passos:

✓ Dividimos o número 12 pelo seu menor divisor primo.

	12	2	
Quocientes ←	6	2	→ Fatores primos
	3	3	
	1		

✓ A seguir, dividimos o quociente obtido pelo menor divisor primo deste quociente e assim, sucessivamente, até obter quociente 1.

$$12 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3$$
ou
$$12 = 2^2 \,.\, 3$$

6 – CÁLCULO PRÁTICO DO M.M.C.

Como você já sabe fatorar, veremos uma maneira mais prática de encontrar o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números. Para isso, vamos resolver o problema anterior **fatorando simultaneamente 4 e 6** (maneira prática).
Assim:

4,6	2
2,3	2
1,3	3
1,1	12

Neste processo, decompomos os dois núeros ao mesmo tempo. O m.m.c. de 4 e 6 é o produto dos fatores primos que obtemos nessa fatoração.

m.m.c. (4,6) = 2 . 2 . 3 = 12

Portanto, os horários dos ônibus voltarão a coincidir depois de 12 horas.

7 – IDÉIA DE FRAÇÃO

PROGRAMAÇÃO DE HOJE		
SBT	**BANDEIRANTES**	**MANCHETE**
TJ Brasil 19h00 min Jô Onze e Meia 23h30 min	Jornal Bandeirantes 19h15 min Faixa Nobre do Esporte 20h30 min	Manchete Esportiva 20h00 min Jornal da Manchete 20h20 min Uma Onda no Ar 21h30 min Gente de Expressão 22h30 min

Situação – 1

Observe o nome e o horário do seguinte programa:

Nome: “Jô Onze e Meia”
Horário: “23h30”

É de uso popular se referir a horários, após as 12h desta maneira: 1h, 2h, 3h, etc... Esse uso vem da observação dos relógios usuais que são divididos em 12 partes iguais.

O nome do programa “jô Onze e Meia”, leva em conta esse conhecimento popular.

No horário “23h30”, o que seria esse 30?

Esse 30 corresponde a 30 min que é igual a meia hora, então dizemos que 30 min = 1/2h, mas como?

Para responder essa pergunta necessitamos de mais algumas informações: uma hora é igual a sessenta minutos =; a metade de 1h é sessenta dividido por dois que é trinta.

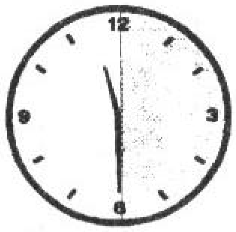
* 1h = 60min $\Rightarrow$ 1/2h = 30min

ou

* ½ de 60 = ½ x 60 = 60/2 = 30

Pois: 60min : 2 = 30min

No relógio:



$\frac{1}{2}$h (um meio)

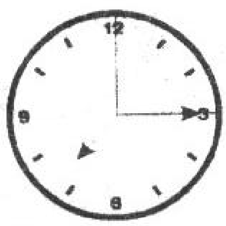
Quando o ponteiro grande percorre uma volta completa, passou uma hora. Se o ponteiro grande percorre metade da volta, então percorreu ½ volta (parte pintada do relógio).

Logo, 30 min = ½ h

Situação – 2

Observe o programa "Jornal da Bandeirantes", o seu horário é 19h15. Preste atenção nos 15 min: ele é um "pedaço" da hora. Quanto representa esse pedaço?

No relógio:



$\frac{1}{4}$h (um quarto)

* O ponteiro grande percorreu ¼ de volta.

* ¼ h = ¼ x 60 = 60/4 = 15min

Logo, 15 min = ¼ h.

Situação - 3

Vamos trabalhar com o “Jornal da Manchete”, que vai ao ar às 20h20.

20min seriam que parte da hora?

No relógio:

* O ponteiro grande percorreu 1/3 de volta.

* 1/3h = 1/3 x 60 = 60/3 = 20 min

Logo, 20 min = 1/3h

As apresentações ½, ¼, 1/3 são chamadas de **números fracionários** ou **frações** e representam uma parte do todo.

Situação – 4

Vamos representar a fração 2/3h.

No relógio:

* o todo foi dividido em 3 partes.
* A fração representa duas dessas partes.

*   2/3h = 2/3 x 60 = 120/3 = 40 min.

Logo, 2/3h = 40min.

Na fração 2/3, o número 3 representa em quantas partes iguais o todo (uma hora) foi dividido e é chamado de **denominador**. O número 2 indica quantas destas partes foram consideradas e é chamado de **numerador**.

Vamos representar a quantidade de cada situação seguinte, em forma de fração.

Situação - 5

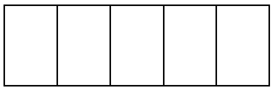
Paulo comeu três quartos da pizza. Significa que a pizza foi dividida em 4 partes iguais, Paulo comeu 3 dessas partes.

Representação, representamos por ¾ (três quartos).

Situação - 6

Foram colocadas lajotas em dois quintos do piso do banheiro. Significa que o piso do banheiro foi dividido em 5 partes iguais, e foram colocadas lajotas em duas dessas partes.

Representação no desenho:



Em Matemática, representamos por 2/5 (dois quintos).

$$\frac{2}{5}$$

8 – tipos de frações

Situação – 1

Das situações 1, 2, 3 (anteriores) vamos destacar as frações $\frac{60}{2}$, $\frac{60}{4}$, $\frac{60}{3}$. Você deve ter percebido que elas representam números inteiros.

Assim:

* $\frac{60}{2} = 30$

* $\frac{60}{4} = 15$

* $\frac{60}{3} = 20$

Essas frações que representam números inteiros são chamadas **frações aparentes.**

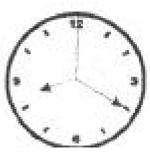
Situação -2

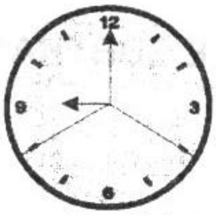
Saí de minha casa às 8 horas. Enquanto estive fora o ponteiro grande deu 5/3 de volta. A que horas retornei?

O relógio abaixo marca o horário que saí de casa:

Se o ponteiro grande deu $\frac{5}{3}$ de volta, ele percorreu mais do que uma volta completa?

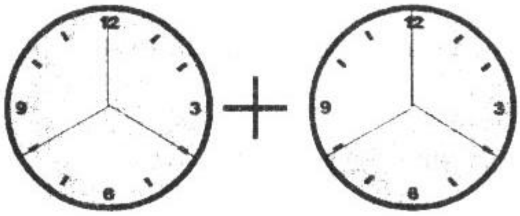
Veja:





Você observa que o relógio todo, ou seja, uma volta completa, é $\frac{3}{3}$, que corresponde a uma hora.

Então vamos considerar $\frac{5}{3}$ de volta:



$\frac{3}{3}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}$

$$\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Você deve ter percebido que $\frac{5}{3}$ corresponde a $\frac{3}{3} + \frac{2}{3}$, ou seja, uma hora mais dois terço da hora. Por isso, também pode ser escrita $1\,\frac{2}{3}$ (um inteiro e dois terços).

Dessas observações podemos concluir que:

* A fração $\frac{5}{3}$ representa quantidade maior que a unidade, (uma hora mais $\frac{2}{3}$ h).

Frações como essa são chamadas **frações impróprias.**

Como a fração $\frac{5}{3}$ corresponde a uma volta inteira mais $\frac{2}{3}$ de volta, pode ser representada por $1\,\frac{2}{3}$ (um inteiro e dois terços).

Dizemos que $1\,\frac{2}{3}$ é a **forma mista** da fração $\frac{5}{3}$.

*   A fração $\frac{2}{3}$ representa quantidade menor que a unidade ($\frac{2}{3}$).

Frações como essa são chamadas **frações próprias.**

Você já descobriu que $\frac{5}{3}$ de volta é igual a uma hora mais $\frac{2}{3}$ da hora.

Então, a que horas retornei?

9 – ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

Situação – 1

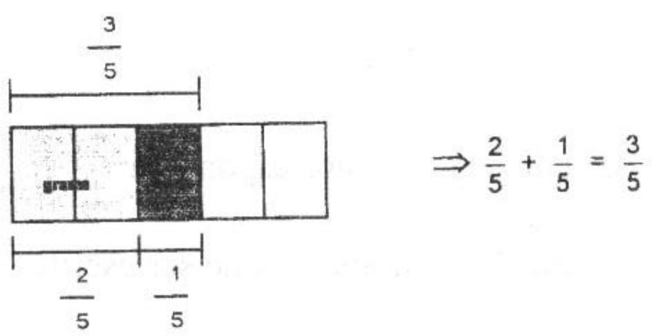
Da área total de um terreno usei $\frac{2}{5}$ para gramar, $\frac{1}{5}$ para fazer uma horta e o restante na construção de uma casa.

Nestas condições, responda:

a) Qual a fração do terreno ocupada pela grama e pela horta?

Para responder esta pergunta temos que calcular $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$.

Vamos usar desenho para representar o terreno.



Portanto, a fração ocupada pela grama e pela horta é $\frac{3}{5}$.

b) Qual a fração do terreno ocupada na construção de minha casa?

Situação – 2

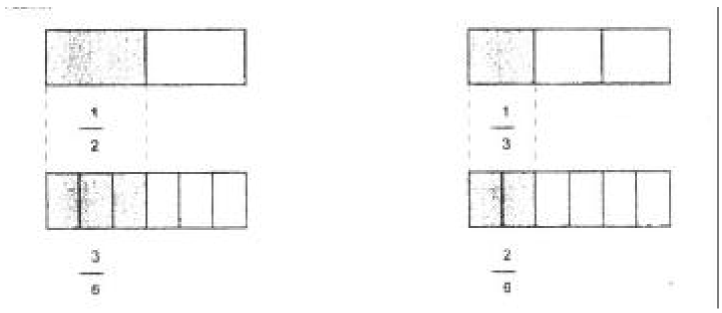
Um freguês comprou $\frac{1}{2}$ de uma torta, outro comprou $\frac{1}{3}$ da mesma torta. Nessas condições responda:

a) Que fração da torta os dois fregueses compraram juntos?

Para resolver esse problema, temos que calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Neste caso os cálculos são mais trabalhosos porque os denominadores são diferentes. Precisamos deixá-los iguais. Para isso, teremos que "substituir" as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ por frações equivalentes a elas e que tenham denominadores iguais.

Vamos usar desenhos para representar essas frações.

Assim:



Observe que :

$\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ são frações que têm denominadores diferentes.

$\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$ são **frações equivalentes** às iniciais ($\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$) e que têm o mesmo denominador.

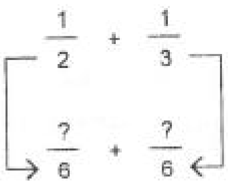
Podemos concluir que efetuar $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ é o mesmo que calcular $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, ou seja:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Portanto, os dois fregueses compraram juntos $\frac{5}{6}$ da torta.

Podemos também encontrar as frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ que tenham denominadores iguais, sem usar desenhos, isto é, pelo **processo prático.**

Veja:



- Calculamos o m.m.c. dos denominadores 2 e 3.

Assim:

$$\begin{array}{c|c} 2,3 & 2 \\ 1,3 & 3 \\ 1,1 & \end{array}$$

- Os novos denominadores devem ser iguais a 6.

M.M.C.(2,3) = 2 . 3 = 6

- O novo numerador de cada fração é calculado dividindo-se o m.m.c. (6) pelo denominador e multiplicando-se este resultado pelo numerador da fração inicial.

Assim:

$$\frac{1}{2} = \frac{?}{6} \xrightarrow{\textbf{(6:2).1-3}} \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{?}{6} \xrightarrow{\textbf{(6:3).1=2}} \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Como :

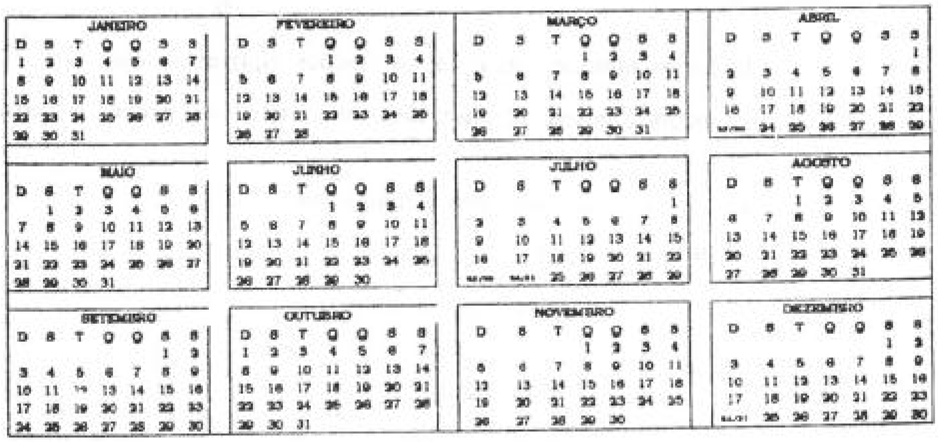
$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ e } \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

b) Que fração da torta restou?

ATIVIDADE – III



1) Observe o calendário acima e responda:

a) Quantos meses têm 31 dias? E quantos têm 30 dias?

b) Se um ano tem 12 meses, qual a fração que representa os meses que têm 31 dias? E a que representa os de 30 dias?

c) Se um número é par quando ele é múltiplo de 2 (dois), quais são os dias pares do mês de maio?

d) Com relação ao mês de junho, qual é a fração que representa seus dias pares?

e) Em relação ao mês de outubro, qual é a fração que representa 15 dias?

f) Transforme em frações (com relação aos dias do mês de abril):

- Uma semana;
- 3 semanas;
- Agora, que fração representará o total dos itens **a** e **b**?

g) Se você viajar durante uma semana e trabalhar o restante do mês de fevereiro, qual a fração que representa o tempo que você trabalhou? (em relação ao número de semanas).

h) Como você sabe, o mês de fevereiro tem 28 ou 29 dias. Tem 29 no ano bissexto que ocorre de 4 em 4 anos, (sempre nos anos múltiplos de 4). Com base nessa informações, responda qual será o próximo ano bissexto?

i)

Qual é a fração que representa o mês de fevereiro em relação aos meses do ano considerando o calendário dado?

j) Qual é a diferença entre as frações que representam os meses de 31 dias e o de 28 dias?

l) Considerando que você trabalha de segunda à sexta feira e baseando-se nos dias da semana (7 dias), qual a fração que representa os dias em que você trabalha? E os dias em que descansa? E a diferença?

m) Se você só pode ver a sua novela preferida segunda, quarta e sexta feira, qual a fração da novela que você vê durante a semana? (Não considerar o domingo).

2) Analise esta receita e responda:

DOCINHOS DE AMENDOIM

$\frac{1}{2}$ xícara de amendoim cru, moído;

$\frac{3}{4}$ xícara de açúcar;

$\frac{1}{2}$ xícara de leite;

$\frac{1}{2}$ colher (de sopa) de manteiga ou margarina;

1 pitada de sal

Coloque todos os ingredientes numa panela e leve ao fogo. Cozinhe mexendo sempre até desprender bem do fundo da panela. Retire do fogo e bata bem com uma colher de pau. Despeje sobre uma superfície untada, deixe esfriar e corte em losangos.

a) Qual a quantidade que se deve colocar de amendoim?
b) Faça um desenho representando essa quantidade.
c) Qual a quantidade de amendoim e açúcar que se deve colocar na receita?
d) Se você cozinhou $\frac{1}{2}$ xícara de amendoim, $\frac{3}{4}$ xícaras de açúcar e $\frac{1}{2}$ xícara de leite, qual é a soma das frações de ingredientes que cozinhou?
e) Silvana preparou a receita e percebeu que a quantidade de docinhos prontos é muito pequena. Resolveu dobrar a receita. Que quantidade de cada ingrediente ela vai precisar? Escreva a nova receita.
f) E se Silvana resolver triplicar a receita, que quantidade cada ingrediente vai precisar?

3) Um programa de rádio tem 1 hora de duração. Metade desse tempo é reservado para a programação musical, $\frac{1}{3}$ para o noticiário e o restante para propaganda? Esse tempo representa que fração da hora?

4) Para fazer uma receita de Pão-de-queijo, Lucimar usou 100 g de queijo. A que fração de 1 kg corresponde essa quantidade? (Sabe-se que 1 kg = 1000 g).

5) Quantos são:

a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} =$

b) $\frac{7}{9} - \frac{1}{6} =$

c) $\frac{5}{8} + \frac{7}{12} =$

d) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} =$

e) $\frac{4}{5} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8} =$

6) Se um determinado programa, com duração de $\frac{5}{6}$ h, reservar $\frac{1}{6}$ h, no seu início, para anúncios de “crianças desaparecidas”, que fração de horas sobrará para o programa?

7) Se um determinado programa, com duração de $\frac{5}{6}$ h, reservar $\frac{1}{3}$ h, para campanha de arrecadação de agasalhos, que fração de horas sobrará para o programa?

8) Quantos minutos têm $\frac{4}{3}$ de uma hora? Transforme essa fração em número misto.

9) Vinte meses correspondem a que fração do ano? Esse tempo corresponde a quantos anos e quantos meses?

10) O mês comercial tem 30 dias. Representando 45 dias em relação aos dias do mês comercial temos: $\frac{45}{30}$.

Esta fração imprópria pode ser representada na forma de número misto:

$$\frac{45}{30} = \frac{30}{30} = \frac{15}{30} = 1\frac{15}{30} = 1\frac{1}{2}$$

Isso significa que em relação ao mês comercial, 45 dias representam 1 mês e 15 dias.

Represente agora, 51 dias em relação aos dias do mês comercial.

11) Um metro é igual a 100 cm. Represente 234 cm em relação ao metro, na forma de fração imprópria e de número misto.

10 – MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Situação – 1

A rua onde moro está sendo asfaltada. Durante um dia já foram asfaltadas $\frac{1}{5}$ do comprimento total da rua. Se o trabalho continuar nas mesmas condições, que fração da rua está asfaltada com três dias?

Para resolver esse problema, temos que calcular: $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ que é o mesmo que calcular $3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

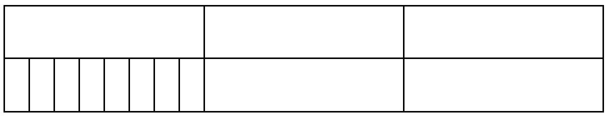
Portanto, $\frac{3}{5}$ é a fração da rua que será asfaltada em três dias.

Situação - 2

Um tapete ocupa $\frac{1}{3}$ do piso de uma sala. Neste tapete há uma mesa que ocupa $\frac{1}{2}$ de sua área. Que fração da sala é ocupada pela mesa?

Para resolver esse problema, temos que calcular quanto é $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$.

Vamos usar desenho para representar esta situação.



- A parte escurecida representa $\frac{1}{3}$ da sala que é ocupado pelo tapete.
- A parte hachurada representa espaço do tapete ocupado pela mesa, ou seja, $\frac{1}{2}$ do tapete.

Portanto, a mesa ocupa $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ da sala.

Em matemática, a palavra **de** pode ser substituída pelo sinal . de multiplicação; (.)

Então, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Logo, a mesa ocupa $\frac{1}{6}$ da sala.

11 – DIVISÃO DE FRAÇÕES

Situação - 1

A duração de uma aula de natação, numa determinada academia, corresponde a $\frac{1}{2}$h.

Quantas aulas serão dadas em 2 horas?

Para resolver este problema temos que descobrir quantas vezes $\frac{1}{2}$ h cabe em 2 horas. Ou seja 2 : $\frac{1}{2}$.

Você já deve ter resolvido mentalmente este problema e respondido 4 aulas.

$\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h = \frac{4}{2}h = 2h$, porque $\frac{1}{2}$h cabe 4 vezes em duas horas.

O resultado de 4 aulas também pode ser encontrado quando multiplicamos 2 pelo inverso de $\frac{1}{2}$.

Assim:

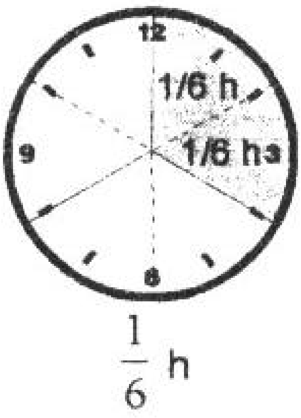
$$2 : \frac{1}{2} = 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{1}\right)}_{\text{Inverso de } \frac{1}{2}} = \frac{4}{1} = 4$$

Situação – 2

Se o professor reservar $\frac{1}{3}$h de uma aula de natação para dois alunos treinarem individualmente “nado borboleta”, que fração de hora cada aluno terá para treinar?

Para resolver este problema, temos que repartir $\frac{1}{3}$ em duas partes iguais, ou seja, $\frac{1}{3}$: 2.

Vamos usar desenhos para representar esta situação:



Portanto, cada aluno terá $\frac{1}{6}$ h, para treinar "nado borboleta".

Veja: $\frac{1}{6}\,h + \frac{1}{6}\,h = \frac{2}{6}\,h = \frac{1}{3}\,h$

O resultado $\frac{1}{6}$ h também pode ser encontrado quando multiplicamos $\frac{1}{3}$ pelo inverso de 2.

$$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{Inverso de } 2} = \frac{1}{6}$$

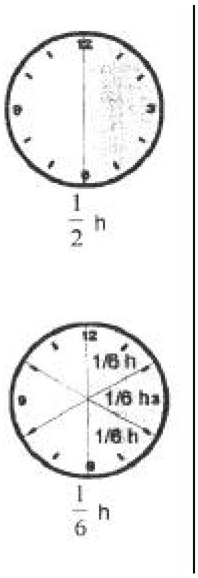
Situação – 3

Durante uma aula de natação com $\frac{1}{2}$ h de duração o professor quer treinar, individualmente, alguns alunos que vão participar de um campeonato e quer reservar $\frac{1}{6}$ h para cada aluno.

Quantos alunos serão treinados durante essa aula?

Para resolver este problema, temos que descobrir quantas vezes $\frac{1}{6}$ h cabe em $\frac{1}{2}$ h, ou seja, $\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$.

Vamos usar desenhos para representar essa situação:



Portanto, serão treinados 3 alunos durante essa aula.

O resultado de 3 alunos também pode ser encontrado quando multiplicamos $\frac{1}{2}$ pelo inverso de $\frac{1}{6}$.

Assim:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6}{2} = 3$$

Nas situações anteriores, usamos a relação entre um número e seu inverso.

Recordando, temos:

- O inverso de $\frac{1}{2}$ é 2, porque $\frac{1}{2}$ x 2 = $\frac{2}{2}$ = 1

- O inverso de 2 é $\frac{1}{2}$, porque 2 x $\frac{1}{2}$ = $\frac{2}{2}$ = 1

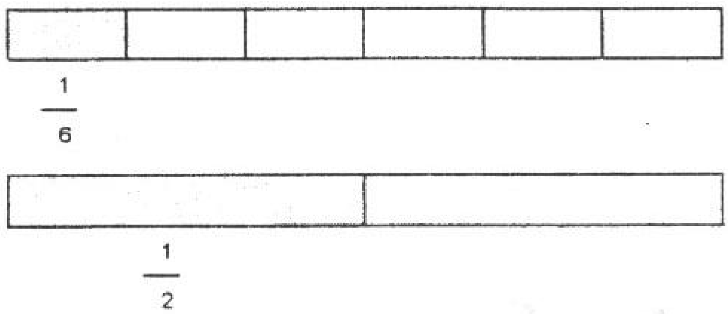
- O inverso de $\frac{1}{6}$ é 6, porque $\frac{1}{6}$ x 6 = $\frac{6}{6}$ = 1

Portanto:

Um número multiplicado pelo seu inverso é igual a 1.

ATIVIDADE - IV

1) Observe e responda:



a) Quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{1}{2}$?

b) Qual é o resultado de $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{6}$?

2) Lucimar e Ivone ganharam um bolo de seus alunos. Repartiram igualmente. Lucimar repartiu o que lhe coube em 6 pedaços iguais. Se ela der cada um desses pedaços para suas colegas, que fração do bolo cada uma receberá?

3) Um pessoa faz caminhada $\frac{2}{3}$h por dia. Se essa pessoa caminha de segunda a sexta-feira, que fração de horas ela caminha durante a semana?

4) Um pacote contém $\frac{2}{5}$ de quilograma de balas. Que fração de quilograma você terá se comprar:

a) 2 desses pacotes?
b) A metade desse pacote?

5) Pela manhã, o carro de Paulo estava com $\frac{1}{2}$ tanque de gasolina. No final do dia, ela havia gasto $\frac{3}{4}$ dessa gasolina. Que fração do tanque ele gastou de gasolina nesse dia?

6) Sérgio comprou 5 quilos de arroz. Ele consome $\frac{1}{3}$ de quilo por dia. Quantos dias durará essa quantidade de arroz?

7) Uma consulta médica, numa determinada clínica, tem a duração média de $\frac{1}{5}$ horas. Quantas consultas serão feitas em $\frac{4}{5}$ horas?

8) Marina quer colocar $\frac{3}{4}$ ℓ de suco de uva em 6 copos. Que fração de litro deve colocar em cada copo, para que todos fiquem com quantias iguais?

9) Você resolve viajar $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{2}$ mês. Que fração do mês você foi viajar?

10) Calcule:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} =$

b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} =$

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} =$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} =$

e) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{3} =$

f) $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} =$

g) $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} =$

h) $\frac{2}{7} : 3 =$

i) $4 : \frac{8}{6} =$

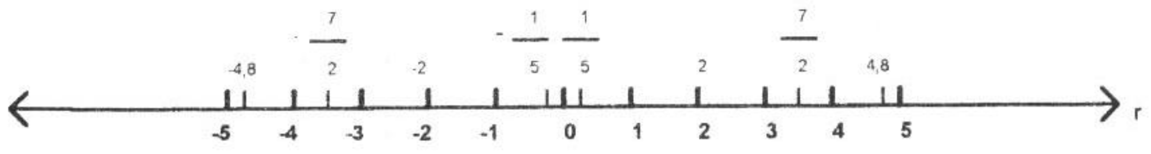
j) $10 : \frac{3}{5} =$

U N I D A D E 3
NÚMEROS RACIONAIS RELATIVOS

1 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS RACIONAIS

Você já sabe que os números $\frac{1}{5}$; 2; $\frac{7}{2}$; 4,8 dentre outros, são números racionais absolutos. Para cada um deles existe um número negativo correspondente.

Veja a representação geométrica abaixo:



Observe que os números racionais positivos são assinalados à direita de zero e os números racionais negativos à esquerda de zero.

Em Matemática, representamos o conjunto dos números racionais relativos pela letra Q. O conjunto Q é constituído pelos números racionais positivos, pelo número zero e pelos números racionais negativos.

2 – OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS RELATIVOS

Você já conhece as operações com os números racionais absolutos e com os números inteiros. Usando desses conhecimentos, podemos então, efetuar as operações com os números racionais relativos.

Vejamos:

Situação - 1

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Qual é o resultado de:

a) $\frac{1}{3}$ - $\frac{2}{3}$?

Observamos que os denominadores são iguais, então, efetuamos a soma algébrica dos numeradores e conservamos o denominador.

Assim:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1-2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Logo, o resultado é $-\frac{1}{3}$

b) $-\frac{2}{5}$ + $\frac{1}{3}$?

Lembrando que, quando os denominadores são diferentes, calculamos o m.m.c. que nesse caso, é 15. Dividimos então, 15 pelo denominador e multiplicamos pelo numerador de cada uma das frações. Em seguida, efetuamos a soma algébrica.

Assim:

$$-\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{-6+5}{15} = -\frac{1}{15}$$

Logo, o resultado é $-\frac{1}{15}$

c) $-\frac{1}{2} - \frac{5}{3}$

d) $+\frac{3}{2} - 4$

Situação – 2

MULTIPLICAÇÃO

Qual é o resultado de:

a) $\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(+\frac{3}{5}\right)$?

Vamos calcular o produto dos módulos, ou seja:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1.3}{4.5} = \frac{3}{20}$$

Lembrando que a multiplicação de um número inteiro negativo por um número inteiro positivo resulta em um número inteiro negativo, então:

$$\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(+\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{20}$$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)$?

Calculamos o produto dos módulos, assim:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2.5}{3.8} = \frac{10}{24}$$

Simplificando a fração $\frac{10}{24}$, temos:

$$\frac{10:2}{24:2} = \frac{5}{12}$$

Lembrando que a multiplicação de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro positivo, então:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = +\frac{5}{12}$$

Logo, o resultado é $+\frac{5}{12}$

Agora, faça você!

c) $\left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$

Situação - 3

DIVISÃO

Qual é o resultado de:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right):\left(+\frac{1}{3}\right)$

Lembrando que na divisão de frações multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda, temos:

$$\left(-\frac{2}{5}\right):\left(+\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\underbrace{\left(+\frac{3}{1}\right)}_{\text{Inverso de } \left(+\frac{1}{3}\right)}=-\frac{6}{5}$$

Como já sabemos, o quociente entre dois números inteiros é negativo, se eles tiverem sinais diferentes.

Logo, o resultado é $-\frac{6}{5}$

ATIVIDADE - V

1) Efetue:

a) $-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}$

b) $-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$

d) $-\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

e) $-\frac{4}{3} + \frac{5}{2}$

f) $-\frac{1}{6} - 2$

g) $\left(+\frac{2}{3}\right) . \left(-\frac{1}{2}\right)$

h) $\left(-\frac{1}{4}\right) . \left(-\frac{2}{5}\right)$

i) $\left(-\frac{5}{3}\right) . \left(+\frac{1}{5}\right)$

j) $\left(-\frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right)$

k) $\left(+\frac{7}{3}\right) : (-3)$

l) $\left(-\frac{4}{9}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right)$

UNIDADE 4
NÚMEROS DECIMAIS

No século XVI, um matemático se nome Viète estabeleceu uma forma diferente de representar frações com potências de 10 nos denominadores, como por exemplo $\frac{5}{10}$.

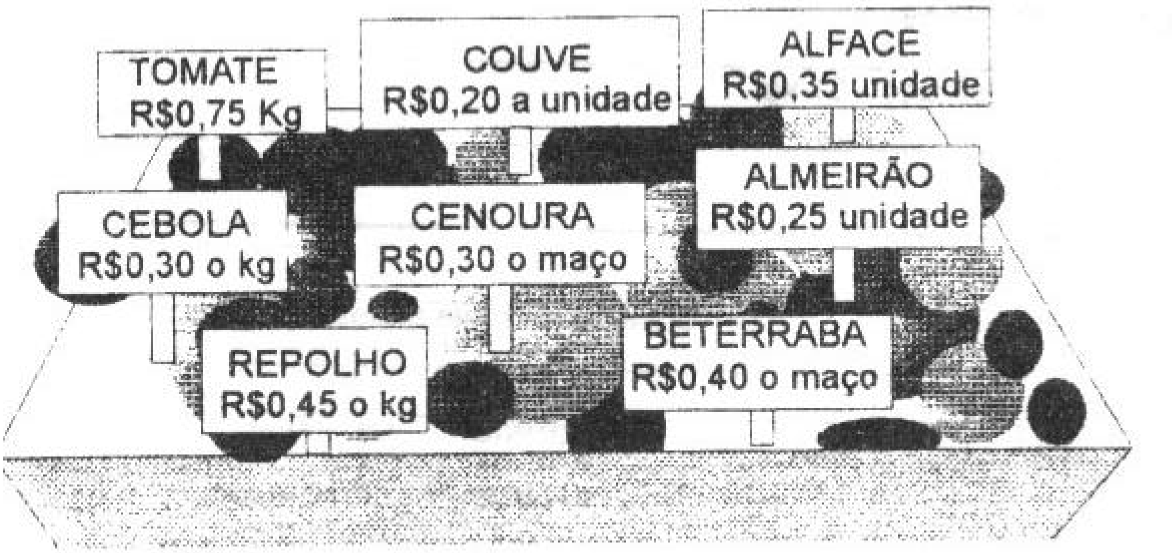
Essa fração também poderia ser representada pelo **número decimal 0,5** (cinco décimos).

Observe que nessa representação existe um vírgula que separa a parte inteira da parte decimal.

$$\underbrace{0}_{\text{Parte inteira}}\ ,\ \underbrace{5}_{\text{Parte decimal}}$$

Os números decimais são muito freqüentes em nosso cotidiano. Quando vamos fazer compras, por exemplo, eles estão presentes na quantidade que compramos ou nos preços das mercadorias.

Veja:



1 – OPERAÇÕES COM NÚMEROS DECIMAIS

EXECUSÃO: GUARDA MIRIN DE MARINGÁ

IDENTIFICAÇÃO DO PRODUTO	CÓDIGO	MARCA	PREÇO
Açúcar Cristal com 5 kg	FT-P	Del Prata	4,25
Arroz Polido Tipo 1 – 5 kg	CE	Grego	8,50
Café Torrado Moído – 500 gramas	FT	Maringá	2,88
Farinha de Trigo Especial – 1 k	LU	Dona Benta	1,60
Farinha de Trigo Especial – 5 kg	FT-P	Dona Benta	7,00
Leite Condensado – Lata – 395 gramas	CE	Moça	1,49
Leite Condensado – Caixa – 395 gramas	FT	Avaré	1,40
Creme de Leite – Caixa – 250 gramas	LU	Batavo	1,60
Creme de Leite – Lata – 300 gramas	LU	Nestlé	1,79
Leite em Pó – 400 gramas	CE	Ninho	3,30
Milho para Pipoca – 500 gramas	LU	Zaeli	1,30
Óleo de Soja em Lata – 900 ml	CE-P	COAMO	2,20
Óleo de Soja em Plástico – 900 ml	CE-P	COCAMAR	2,10
Sal Refinado Pacote – 01 kg	MG	Moc	0,70
Sardinha Lata – 135 gramas	CE	Oceano	1,30
Apresuntado – 01 kg	FT	Perdigão	9,20
Carne de Boi de 1ª (Coxão Mole) – 01 kg	KR		4,20
Carne de Boi de 2ª (Acém sem Osso) – 01 kg	FT		4,90
Charque – 01 kg	KR	Navirai	8,50
Frango Resfriado – 01 kg	FT	Avaí	2,80
Mortadela – 01 kg	KR	Central	6,50

CÓDIGOS DOS MERCADOS PESQUISADOS

CE – CENTRAL **LU – LÚCIO** **MG - MARINGÁ**	**KR – KARIMÃ** **FT – FONTANA** **P – PRODUTO EM PROMOÇÃO**

Situação - 1

Suponha que você vai fazer compras para a sua casa, e consultando a lista de pesquisa, quer saber quanto gastará para comprar:

a) 5 kg de arroz tipo 1, 1 kg de sal e uma lata de óleo de soja.

Para responder essa questão, você já sabe que tem que fazer uma adição, só que vai trabalhar com números com vírgulas, isto é, números decimais.

Faça o cálculo do valor aproximado desta compra. Escreva como você chegou a esse resultado.

Essa operação pode ser efetuada da seguinte maneira:

Coloque os preços de modo que as vírgulas fiquem uma embaixo da outra e adicione como se os números fossem naturais. No resultado, coloque a vírgula em baixo das demais.

Assim:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 8{,}50 & \rightarrow & \text{parcela} \\
+ & 0{,}70 & \rightarrow & \text{parcela} \\
 & 2{,}20 & \rightarrow & \text{parcela} \\
\hline
 & 11{,}40 & \rightarrow & \text{soma}
\end{array}
$$

Você fez uma **adição de números decimais.** Portanto, gastará R$11,40 (onze reais e quarenta centavos).

Situação – 2

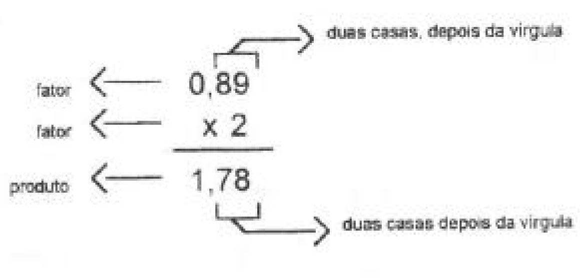
Se você resolver comprar 2 latas de leite condensado, quanto vai gastar?

Consultando a lista, verificamos que cada lata custa R$1,49 (um real e quarenta e nove centavos).

Com esse dado, calcule o preço das duas latas de leite. Registre como você procedeu para efetuar os seus cálculos.

Essa operação pode ser efetuada da seguinte maneira:
Calcule o produto como se os fatores fossem números naturais.
Coloque a vírgula no produto de modo que fique com o mesmo número de casas decimais dos fatores.

Assim:



Você fez uma **multiplicação de números decimais** e viu que gastará R$1,78 (um real e setenta e oito centavos).

Situação - 3

Para comprar farinha de trigo, você fará ,ais economia se comprar 5 kg em um pacote ou em 5 pacotes de 1 kg cada?

1 pacote	5 kg = 7,00
1 pacote	1 kg = 1,60
5 pacotes	1 kg = 8,00

De quanto é a economia?

Para responder você sabe que tem que fazer uma subtração, mas como será?

Para a subtração de números decimais, vamos proceder da mesma maneira que fizemos para a adição

8,00 → minuendo
7,00 → subtraendo
____
1,00 → resto ou diferença

Portanto, a economia será de R$ 1,00 (um real), se comprar 1 pacote de 5 kg e você acabou de fazer uma **subtração de números decimais.**

Situação - 4

Suponha que você tem R$36,30 (trinta e seis reais e trinta centavos) e resolveu fazer um estoque de leite em pó. Quantas latas você vai comprar?

Faça o cálculo do número de latas que você poderá comprar com esse valor.

Você sabe que tem que dividir 36,30 por 3,30.

Essa operação pode ser efetuada da seguinte maneira:

Conte as casas decimais do dividendo e do divisor (elas devem ser iguais). Como 36,30 e 3,30 possuem a mesma quantia de casas decimais, podemos eliminar a vírgula nos dois números. Ficamos, então, com 3630 : 330 e efetuamos normalmente a divisão.

Assim:

```
                          dividendo
3630  | 330               divisor
 330  |_____
----    11                quociente
0330
- 330
----
 000                      resto
```

Portanto, você vai poder comprar 15 latas e fez uma **divisão de números decimais.**

Situação - 5

O seu vizinho achou a sua idéia muito boa e resolve fazer o mesmo, só que ele quer comprar o leite em pó num mercadinho perto de sua casa. Ele possui a quantia de R$ 28,20 (vinte e oito reais e vinte centavos) que é suficiente para comprar 12 latas. Qual o preço da lata de leite em pó, neste mercadinho?

Para resolver este problema você sabe que é necessário dividir 28,20 por 12.

Vamos proceder da mesma maneira que fizemos para a divisão anterior.

Como 28,20 tem duas casas decimais e, 12 é um número inteiro, deve-se colocar a vírgula à direita do 12 e, em seguida, dois zeros (ficando com 12,00), igualando assim, as casas decimais.

Em seguida eliminamos a vírgula nos dois números, e efetuamos normalmente a divisão 2820 : 1200

```
   2820  | 1200
 – 2400  |______
           2
 ------
   0420
```

Até agora encontramos o quociente 2 e o resto 420

No caso de números decimais, a divisão pode ser prolongada. Para fazer isso colocamos um zero a direita do resto, uma vírgula no quociente e continuamos a divisão.

Cada novo resto ganhará um zero e a conta poderá continuar.

Assim:

```
   2820   | 1200
 - 2400   |______
   ------   2,35
   04200
 - 03600
   ------
   006000
 - 006000
   ------
   000000
```

O resultado da divisão de 28,20 por 12 é 2,35

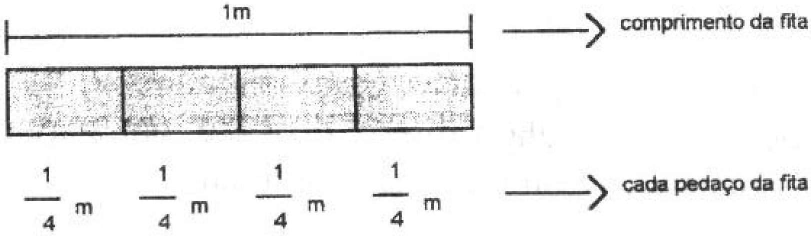
Portanto o preço da lata de leite em pó é R$ 2,35 e você fez mais uma divisão de números decimais.

2 – TRANSFORMAÇÃO DE FRAÇÃO EM NÚMEROS DECIMAIS

Veja a situação:

Márcia tem uma fita de cetim de um metro de comprimento. Márcia quer dividi-la em quatro pedaços de comprimento iguais. Quanto deve medir o comprimento de cada pedaço?

Representando, por desenho, essa situação, temos:



Observe que quando dividimos o comprimento de 1 m em 4 partes iguais, obtivemos $\frac{1}{4}$ m para cada pedaço de fita.

Como a fração $\frac{1}{4}$ representa a divisão de 1 por 4 temos:

$$1 : 4 \longrightarrow \begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ -08 & 0,25 \\ \hline 020 & \\ -020 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

$$\text{Então } 1 : 4 = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{forma fracionária}} = \underbrace{0,25}_{\text{forma decimal}}$$

Observe que no dia-a-dia é mais comum usar 0,25 m do que $\frac{1}{4}$ m.

Toda fração é a divisão do seu numerador pelo seu denominador.

ATIVIDADE – VI

Você vai continuar a fazer compras, consultando a pesquisa.

IDENTIFICAÇÃO DO PRODUTO	CÓDIGO	MARCA	PREÇO
Açúcar Cristal com 5 kg	FT-P	Del Prata	4,25
Arroz Polido Tipo 1 – 5 kg	CE	Grego	8,50
Café Torrado Moído – 500 gramas	FT	Maringá	2,88
Farinha de Trigo Especial – 1 k	LU	Dona Benta	1,60
Farinha de Trigo Especial – 5 kg	FT-P	Dona Benta	7,00
Leite Condensado – Lata – 395 gramas	CE	Moça	1,49
Leite Condensado – Caixa – 395 gramas	FT	Avaré	1,40
Creme de Leite – Caixa – 250 gramas	LU	Batavo	1,60
Creme de Leite – Lata – 300 gramas	LU	Nestlé	1,79
Leite em Pó – 400 gramas	CE	Ninho	3,30
Milho para Pipoca – 500 gramas	LU	Zaeli	1,30
Óleo de Soja em Lata – 900 ml	CE-P	COAMO	2,20
Óleo de Soja em Plástico – 900 ml	CE-P	COCAMAR	2,10
Sal Refinado Pacote – 01 kg	MG	Moc	0,70
Sardinha Lata – 135 gramas	CE	Oceano	1,30
Apresuntado – 01 kg	FT	Perdigão	9,20
Carne de Boi de 1ª (Coxão Mole) – 01 kg	KR		4,20
Carne de Boi de 2ª (Acém sem Osso) – 01 kg	FT		4,90
Charque – 01 kg	KR	Navirai	8,50
Frango Resfriado – 01 kg	FT	Avaí	2,80
Mortadela – 01 kg	KR	Central	6,50

CÓDIGOS DOS MERCADOS PESQUISADOS

CE – CENTRAL **LU – LÚCIO** **MG - MARINGÁ**	**KR – KARIMÃ** **FT – FONTANA** **P – PRODUTO EM PROMOÇÃO**

1) Se for comprar todos os produtos da lista do supermercado Karimã, quanto vai gastar?

2) E se for todos do supermercado Fontana?

3) Em qual gastou mais?

4) Qual a diferença entre os valores das compras?

5) O que é mais vantajoso: comprar o leite condensado em caixa ou em lata? Por quê?

6) E o creme de leite? É mais vantajoso comprar em caixa ou em lata?

7) Se for comprar 2,7 litros de óleo (em embalagens plástica), quanto gastará? (Lembre-se que 1 litro = 1000 ml)

8) Quanto será gasto se comprar 3 latas de sardinha?

9) Se você tem R$ 10,00, quantos pacotes de café poderá comprar? Este resultado eqüivale a quantos quilos de café?

10) Resolva as seguintes operações com números decimais:

a) 27,81 + 12,19 =
b) 1 + 0,477 =
c) 0,08 + 0,11 =
d) 12,11 + 12,9 =
e) 1 – 0,85 =
f) 1,72 + 1,8 =
g) 4,5 – 4,352 =
h) 6,42 – 1,83 =
i) 15,9 – 2,17 =
j) 3,87 – 0,912 =
k) 0,3 x 4,7 =
l) 3,5 x 1,1 =
m) 20,6 x 1,4 =
n) 0,82 x 0,6 =
o) 3,5 x 800 =
p) 0,97 : 7 =
q) 3,075 : 0,15 =
r) 0,42 : 0,014 =
s) 5,04 : 0,8 =
t) 12,11 : 0,11 =
u) 1,41 : 4,7 =

11) Num certo mês, um trabalhador recebeu 700 reais de salário. Gastou 330 reais com aluguel e transporte, 52,30 reais com água e luz, 250,20 reais com alimentação e outras despesas. Neste mês, precisou consultar um dentista que lhe cobrou 150 reais pelo tratamento dentário. Calcule quanto esse trabalhador ficou devendo para o dentista, considerando que a primeira parte paga para o tratamento dentário era o valor restante de seu salário.

12) Ao sair de casa para trabalhar, Silvana tinha na carteira 5,00 reais. Foi de ônibus para o trabalho pagando 0,60 reais. Almoçou no centro da cidade por 2,80 reais e voltou de ônibus para casa. Com o dinheiro que sobrou, comprou 2 litros de leite por 0,60 reais cada e 8 pães de 0,10 cada. Calcule quanto Silvana ficou devendo na padaria.

13) Para fazer um pão, Miriam usa 300 g de farinha de trigo. Com um pacote de 5 kg de farinha quantos pães Miriam pode fazer?

14) ”A cidade de São Paulo desperdiça 147,8 mil toneladas por ano de hortaliças e frutas distribuídas no mercado varejista (F. De S.P. 31.05.94). Baseado nesta afirmação, resnponda:

a) 147,8 mil toneladas (t) correspondem a quantos kg?
b) Qual é o desperdício mensal médio?
c) Se fosse distribuídos entre a população carente este desperdício, e se cada família recebesse 20 kg mensais, quantas famílias seriam favorecidas?

15) Um vidrinho de remédio contém 20 drágeas de 75 mg. Calcule:
a) A massa total das drágeas do vidrinho.
b) A massa desse vidrinho corresponde a que parte do kg?

16) Um frasco de corretivo “Toque Mágico” contém 18 ml e custa R$ 0,79. Pergunta-se:

a) Se um aluno gastou R$2,37 em 1 mês, quantos frascos ele usou?
b) Quantos frascos necessitariam (aproximadamente) para encher uma vasilha de meio litro?
c) Se Alexandre gastou 4 vidros em um ano, quantos reais gastou?

17) O nosso consumo de água, durante o mês, é medido pela SANEPAR em metros cúbicos. Se o consumo de água de uma família, num determinado mês foi 26 m^3 isto significa que esta família gastou quantos litros de água?

BIBLIOGRAFIA

ASIMOV, Isaac. **No mundo dos Números**, Rio de Janeiro, Editora S/A, 1983.

BONGIOVANNI, Vicenzo; LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática e Vida.** São Paulo, Editora Ática S.A. 1990.

BOYER, Carl Benjamim. **História da Matemática.** São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda. 1974.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR., José Ruy. **A conquista da Matemática**. São Paulo, Editora FTD, Edição renovada.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR., José Ruy. **Aprendizagem e Educação Matemática.** São Paulo, Editora FTD, 1990.

GOMES, Carmem; CRUSIUS, Maria Fialho; DANYLUK, Osana Sônia. **Frações e Números Decimais.** Passo Fundo, Gráfica da Universidade de Passo Fundo, 1992.

IMENES, Luiz Márcio. **Vivendo a Matemática.** São Paulo, Editora Scipione – 7ª ed. 1992.

IMENES, Luiz Márcio Pereira; JAKUBO, José; LELLIS, Marcelo Cestari. **Para que serve a Matemática.** São Paulo, Atual Editora, 1992.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Matemática na Medida Certa.** São Paulo, Editora Scipione, 1990.

JORNAL DO TELECURSO 1º GRAU. Rio de Janeiro, Editora Rio Gráfica, 5ª Edição, 3ª fase, Fundação Roberto Marinho, 1985.

KARLSON, Paul. **A magia dos números.** Porto Alegre – RS, Editora Globo S/A, 1961.

KIYUKAWA, Rokusaburo; SHIGEKIYO, Carlos Tadashi; YAMAMOTO, Kazuhito. **Os elos da matemática.** São Paulo – SO, Editora Saraiva, 3ª edição, 1993.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Para aprender Matemática.** São Paulo – SP, Editora Saraiva, 4ª edição, 1991.

RAMOS, Luzia Faraco. **Série "A" Descoberta da Matemática.** São Paulo – SP, Editora Ática S/A 1993.

ROSA NETO, Ernesto. **Didática da Matemática.** São Paulo – SP, Editora Ática S/A, 4ª edição, 1992.

RUIZ, Adriano Rodrigues; CARVALHO, Ana Maria Pessoa de. **O conceito de proporcionalidade.** São Paulo, Editora São Paulo, 1990.